МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

"Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Математический факультет Кафедра алгебры и геометрии

Допущена к защите

Зав. кафедрой Шеметков Л.А.

" " 2005г.

Дипломная работа

Свойство централизаторов конгруэнций универсальных алгебр

Исполнитель

студентка группы М-51

Шутова И.Н.

Руководитель

Д., ф-м н., профессор Монахов В.С.

Гомель 2005

**Содержание**

Введение

1. Основные определения и используемые результаты

2. Свойство централизаторов универсальных алгебр

3. Мультикольцо

Заключение

Список использованных источников

**Введение**

В теории формаций конечных групп, мультиколец и многих других алгебраических систем исключительно важную роль играют такие понятия, как локальные экраны, локальные формации, основанные на определении центральных рядов. Впервые понятие централизуемости конгруэнций было введено Смитом в работе [5]. Возникает задача согласованности определения централизуемости Смита с определением в группах и мультикольцах.Такая задача была решена в указанной работе Смита [5], где было показано:нормальная подгруппа  группы  централизует подгруппу  тогда и только тогда, когда конгруэнции,индуцированные этими нормальными подгруппами, централизуют друг друга в смысле Смита.

Возникает следующий вопрос: справедливо ли аналогичное утверждение для мультиколец, т.е. будут ли выполнятся свойства централизуемости, изложенные в работе [3], для универсальных алгебр.

В настоящей дипломной работе решается задача взаимосвязи структуры мультиколец и универсальных алгебр, получен новый результат: идеал  тогда и только тогда централизуется идеалом , когда соответствующие этим идеалам конгруэнции централизуют друг друга в смысле Смита.

Дипломная работа включает в себя введение, три параграфа и список литературы из 10 наименований.

Перейдем к краткому изложению содержания дипломной работы.

Раздел 1 является вспомогательным и включает в себя все необходимые определения и используемые результаты.

Раздел 2 носит реферативный характер. Здесь приводятся свойства централизаторов конгруэнций, доказательства которых изложены в работах [5, 6, 7].

Раздел 3 является основным. Здесь вводится определение мультикольца, определение идеала мультикольца, определение централизатора идеала и с использованием данных определений доказывается основной результат работы (теоремы 3.4. и 3.5).

**1. Основные определения и используемые результаты**

**Определение 1.1.** [1] Универсальной алгеброй, или, короче, алгеброй называется пара , где  - непустое множество,  - (возможно пустое) множество операций на .

**Определение 1.2.** [1] Конгруэнцией на универсальной алгебре  называется всякое отношение эквивалентности на , являющееся подалгеброй алгебры .

**Определение 1.3.** [1] Если  и  - алгебры сигнатуры , то отображение  называется гомоморфизмом, если для любой -арной операции  и любых элементов  выполняется равенство:



Взаимно однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом.

**Теорема 1.1.** [1] Пусть  - гомоморфизм универсальных алгебр, тогда множество



является конгруэнцией на алгебре  и называется ядром гомоморфизма 

**Теорема 1.2.** [1] Пусть  - гомоморфное наложение, тогда .

**Теорема 1.3.** [1] Пусть  - конгруэнции на алгебре  и , тогда .

**Определение 1.4.** [2] Непустой абстрактный класс алгебр  сигнатуры  называется многообразием, если  замкнут относительно подалгебр и прямых произведений.

Многообразие  называется мальцевским, если конгруэнции любой алгебры из  попарно перестановочны.

**Теорема 1.4.** [2] Конгруэнции любой алгебры многообразия  попарно перестановочны тогда и только тогда, когда существует термальная операция , что во всех алгебрах из  справедливы тождества



**Определение 1.5.** [3] Пусть  и  - факторы алгебры . Тогда они называются:

1) перспективными, если либо  и , либо  и ;

2) проективными, если в  найдутся такие факторы , что для любого  факторы  и  перспективны.

**Теорема 1.5.** [4] Между факторами произвольных двух главных рядов алгебры , принадлежащей мальцевскому многообразию, можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и централизаторы в  равны.

**Теорема 1.6.** [2] (Лемма Цорна). Если верхний конус любой цепи частично упорядоченного множества  не пуст, то  содержит максимальные элементы.

**2. Свойство централизаторов конгруэнций универсальных алгебр**

Под термином ``алгебра'' в дальнейшем будем понимать универсальную алгебру. Все рассматриваемые алгебры предполагаются входящими в фиксированное мальцевское многообразие . Используются определения и обозначения из работы [1]. Дополнительно отметим, что конгруэнции произвольной алгебры обозначаются греческими буквами. Если  - конгруэнция на алгебре , то  - класс эквивалентности алгебры  по конгруэнции ,  - факторалгебра алгебры  по конгруэнции . Если  и  - конгруэнции на алгебре , , то конгруэнцию  на алгебре  назовем фактором на . Очевидно, что  тогда и только тогда, когда .  или  и  или  - соответственно наименьший и наибольший элементы решетки конгруэнций алгебры .

Будем пользоваться следующим определением централизуемости конгруэнций, эквивалентность которого определению Смита [5] доказана в работе [6].

**Определение 2.1.** Пусть  и  - конгруэнции на алгебре . Тогда  централизует  (записывается: ), если на  существует такая конгруэнция , что:

1) из  всегда следует ;

2) для любого элемента  всегда выполняется



3) если , то .

Следующие свойства централизуемости, полученные Смитом [5], сформулируем в виде леммы.

**Лемма 2.1.** Пусть . Тогда:

 существует единственная конгруэнция , удовлетворяющая определению 2.1;

 ;

 если , то .

Из леммы 2.1 и леммы Цорна следует, что для произвольной конгруэнции  на алгебре  существует такая единственная наибольшая конгруэнция , что . Эту конгруэнцию  будем называть централизатором конгруэнции  в  и обозначать .

**Лемма 2.2.** Пусть  - конгруэнции на алгебре , , , . Тогда справедливы следующие утверждения:

 ;

 , где ;

 если, , либо

, либо

, то всегда ;

 из  всегда следует .

**Доказательство. 1).** Очевидно, что  - конгруэнция на , удовлетворяющая определению 1. Значит, в силу п.1) леммы 2.1 .

**2).**  - конгруэнция на , удовлетворяющая определению 2.1. Значит, .

**3).** Пусть . Тогда





Применим к последним трем соотношениям мальцевский оператор  такой, что , для любых элементов . Тогда получим



Аналогичным образом доказываются остальные случаи п.3).

**4).** Пусть . Тогда справедливы следующие соотношения:







Следовательно, , где  - мальцевский оператор. Тогда , т.е. . Так как  и , то . Таким образом . Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем часто ссылаться на следующий хорошо известный факт (доказательство см., например [6]).

**Лемма 2.3.** Любая подалгебра алгебры , содержащая конгруэнцию , является конгруэнцией на .

Доказательство следующего результата работы [5] содержит пробел (следствие 224 [5] неверно, см. [7]), поэтому докажем его.

**Лемма 2.4.** Пусть . Тогда для любой конгруэнции  на 



**Доказательство.** Обозначим  и определим на алгебре  бинарное отношение  следующим образом:



тогда и только тогда, когда , где , . Используя лемму 2.3, нетрудно показать, что  - конгруэнция на алгебре , причем .

Пусть , т.е. , . Тогда  и, значит, .

Пусть, наконец, имеет место  и . Тогда справедливы следующие соотношения:







Применяя мальцевский оператор  к этим трем соотношениям, получаем: . Из леммы 2.2 следует, что . Так как  и , то . Значит, . Но , следовательно, . Итак,  и удовлетворяет определению 2.1. Лемма доказана.

**Лемма 2.5.** Пусть  и  - конгруэнции на алгебре ,  и  - изоморфизм, определенный на . Тогда для любого элемента  отображение  определяет изоморфизм алгебры  на алгебру , при котором . В частности, .

**Доказательство.** Очевидно, что  - изоморфизм алгебры  на алгебру , при котором конгруэнции ,  изоморфны соответственно конгруэнциям  и . Так как , то определена конгруэнция , удовлетворяющая определению 2.1. Изоморфизм  алгебры  на алгебру  индуцирует в свою очередь изоморфизм  алгебры  на алгебру  такой, что  для любых элементов  и , принадлежащих . Но тогда легко проверить, что  - конгруэнция на алгебре  изоморфная конгруэнции . Это и означает, что . Лемма доказана.

Если  и  - факторы на алгебре  такие, что , то конгруэнцию  обозначим через  и назовем централизатором фактора  в .

Напомним, что факторы  и  на алгебре  называются перспективными, если либо  и , либо  и .

Докажем основные свойства централизаторов конгруэнций.

**Теорема 2.1.** Пусть  - конгруэнции на алгебре . Тогда:

 если , то ;

 если , то ;

;

 если ,  и факторы ,  перспективны, то



 если  - конгруэнции на  и , то



**Доказательство. 1).** Так как конгруэнция  централизует любую конгруэнцию и , то .

**2).** Из п.1) леммы 2.2 следует, что , а в силу леммы 2.4 получаем, что .

Пусть  - изоморфизм . Обозначим



По лемме 2.5 , а по определению



Следовательно, .

**3).** Очевидно, достаточно показать, что для любых двух конгруэнций  и  на алгебре  имеет место равенство:



Покажем вначале, что



Обозначим . Тогда, согласно определения 2.1, на алгебре  существует такая конгруэнция , что выполняются следующие свойства:

а) если , то ;

б) для любого элемента , ;

в) если  и , то .

Построим бинарное отношение  на алгебре  следующим образом:



тогда и только тогда, когда  и , . Покажем, что  - конгруэнция на . Пусть , . Тогда  и , . Так как  - конгруэнция, то для любой -арной операции  имеем:



Очевидно, что (,  и , . Следовательно, . Очевидно, что для любой пары . Значит, . Итак, по лемме 2.3,  - конгруэнция на . Покажем теперь, что  удовлетворяет определению 2.1, т.е.  централизует .

Пусть



Тогда  и . Так как ,  и , то . Следовательно,  удовлетворяет определению 2.1.

Если , то , значит,



Пусть, наконец, имеет место (1) и



Тогда . Так как  и , то , следовательно, . Из (2) следует, что , а по условию . Значит,  и поэтому . Тем самым показано, что конгруэнция  удовлетворяет определению 2.1, т.е.  централизует . Докажем обратное включение. Пусть . Тогда на алгебре  определена конгруэнция , удовлетворяющая определению 2.1. Построим бинарное отношение  на алгебре  следующим образом:



тогда и только тогда, когда



и , . Аналогично, как и выше, нетрудно показать, что  - конгруэнция на алгебре . Заметим, что из доказанного включения  следует, что . Покажем поэтому, что  централизует . Так как ,  и , то , т.е.  удовлетворяет условию 1) определения 2.1.

Если , то , следовательно, .

Пусть имеет место (3) и . Так как , , то  и . Из (4) следует, что , следовательно, , т.е. . На основании леммы 2.2 заключаем, что . Следовательно, . Но так как , то , т.е. .

**4)** Обозначим . Пусть  и удовлетворяет определению 2.1. Определим бинарное отношение  на  следующим образом  тогда и только тогда, когда . Аналогично, как и выше, нетрудно показать, что  - конгруэнция, удовлетворяющая определению 2.1. Это и означает, что . Теорема доказана.

Как следствие, из доказанной теоремы получаем аналогичные свойства централизаторов в группах и мультикольцах.

**3 Мультикольцо**

Согласно [2] алгебра  сигнатуры  называется мультикольцом,если алгебра -группа(не обязательно абелева).Все операции из  имеют ненулевые арности и для любой -арной операции  и любых элементов  имеет место =,для любого . Заметим,что мультикольцо является дистрибутивной -группой в смысле определения Хиггинса [10] или мультиоператорной группой согласно А.Г.Куроша [9]. Для мультиколец справедливы следующие равенства:







где ,как обычно, обозначается элемент,противоположный к элементу .

Докажем,например,первое равенство.



Прибавляя к обеим частям равенства элемент,противоположный к элементу



получаем требуемое равенство.

**Определение.** Подалгебра  мультикольца  называется идеалом [9],если -нормальная подгруппа группы  и для любой -арной операции , произвольного  и любых , имеет место



В частности,если -нульарная или унарная операция,то это означает,что



Как следует из примера [8] конгруэнции на мультикольце перестановочны. Следующая теорема устанавливает соответствие между идеалами и конгруэнциями мультикольца.

**Теорема 3.1 [2]** Пусть -идеал мультикольца  и



Тогда -конгуэнция на  и любая конгруэнция на  имеет такой вид для подходящего идеала .

**Доказательство.**

Так как



то . Покажем,что -подалгебра алгебры .Проверим вначале замкнутость  относительно групповых операций. Пусть , т.е. . Тогда в силу того,что ,получаем



т.е.



т.е.. Пусть теперь -n-арная операция и , Так как -идеал,то получаем







т.е. . Теперь из леммы [8] следует,что -конгруэнция на . Обратно,пусть -конгруэнция на . Положим



Из [8] следует,что -нормальная подгруппа группы . Аналогичным образом,как и в [8],показывается,что -идеал мультикольца . Теорема доказана.

**Следствие 3.2.** Решетка идеалов мультикольца  изоморфна решетке его конгруэнций.

**Определение 3.3** [3].Пусть -идеал мультикольца .Тогда централизатором  в  называется наибольший идеал  в  такой,что для любого  и любого  выполняются следующие условия:

1) ;

2) для любой -арной операции  ,любых различных ,произвольных  справедливо





**Теорема 3.4.** Пусть  и -идеалы мультикольца  и . Тогда  и  индуцируют на  соответственно конгруэнции  и , где



тогда



**Доказательство :**

Определим бинарное отношение  на  следующим образом  тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы  и ,что справедливы равенства



Очевидно,что -отношенме эквивалентности на , удовлетворяющее условиям 1)-3) определения 2.1.,замкнутость которого относительно групповых операций доказана в примере [8]

Пусть теперь --арная операция и  Тогда

 и 

для любых  Следовательно,







Подставляя в правую часть последнего равенства значения  и учитывая,что после раскрытия скобок члены,одновременно содержащие элементы  и ,равны нулю , получаем в правой части равенства выражение



Так как -идеал,то







Итак,



тогда .

**Теорема 3.5** Пусть  и -идеалы мультикольца , , -конгруэнции,определенные в теореме 3.4. и  .Тогда .

**Доказательство :** Пусть -конгруэнции мультикольца  и . Обозначим смежные классы по  и ,являющиеся идеалами мультикольца, соответственно  и . Возьмем произвольные элементы , , . Тогда







Следовательно,для любой -арной операции , любых различных  получаем



Из определения 2.1. следует,что



Очевидно,что справедливо и другое аналогичное равенство определения [8] Т.к. из примера [8] следует,что ,то это означает, что .

Очевидно,что из теорем 3.4. и 3.5. и результатов раздела 2 следуют все известные свойства централизаторов подгрупп,а так же свойства централизаторов идеалов мультиколец работы [3](Лемма 2.8).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В настоящей дипломной работе решается задача взаимосвязи структуры мультиколец и универсальных алгебр, получен новый результат: идеал  тогда и только тогда централизуется идеалом , когда соответствующие этим идеалам конгруэнции централизуют друг друга в смысле Смита.

Результаты данной дипломной работы могут быть использованы при чтении спецкурса для студентов математического факультета,а так же аспирантами и научными сотрудниками,занимающимися проблемами современной алгебры.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Кон П.М. Универсальная алгебра. - М.: Мир, 1968. - 351 с.

2. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. - М.Наука, 1983. - 272 с.

3. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1989. - 256 с.

4. Ходалевич А.Д. Универсальные алгебры с -централизаторными рядами конгруэнций // Весцi Акадэмii навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. - 1994. - № 1. - с. 30--34.

5. Smith D.H. Mal'cev varieties // Lect. Notes Math. - 1976. - V. 554. - 158 p.

6. Ходалевич А.Д. Формационные свойства нильпотентных алгебр // Вопросы алгебры. - Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1992. - Вып. 7. - с.76--85.

7. Ходалевич А.Д. Класс нильпотентных универсальных алгебр / Ред. ж. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.н. - Минск, 1991. - 19 с. - Деп. в ВИНИТИ 10.02.91: 4555 - В91.

8. Ходалевич А.Д. Прикладная алгебра //Спецкурс.-Гомель:Изд-во Гомельского ун-та,2002.-с.30

9. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре.- М.:Наука,1973.-339с.

10. Higgins P.J. Groups with multiple operators //Proc. London math.Soc.-1956.-V.6,--№3.-p. 366--416.

**Отзыв**

на дипломную работу

``Свойства централизаторов конгруэнций универсальных алгебр''

студентки 5 курса математического

факультета Шутовой И.Н.

Дипломная работа Шутовой И.Н. посвящена решению задачи изучения формационных свойств подалгебр универсальных алгебр.В отличии от теории многообразий, где основным методом изучения является понятие тождеств, в теории формаций одним из основных является понятие централизуемости. Это связано с определением локальных формаций.

В дипломной работе ''Свойства централизаторов конгруэнций универсальных алгебр'' решена задача взаимосвязи структуры мультиколец и универсальных алгебр, получен новый результат: идеал  тогда и только тогда централизуется с идеалом , когда соответствующие этим идеалам конгруэнции централизуют друг друга в смысле Смита.

В процессе работы над дипломной работой студентка Шутова И.Н. проявила способность к самостоятельным исследованиям, умение работать с научной литературой.

Считаю, что дипломная работа студентки Шутовой И.Н. удовлетворяет необходимым требованиям, предъявляемым к дипломным работам, и заслуживает оценки "отлично", а студентка Шутова И.Н. заслуживает присвоения ей квалификации "Математик. Преподаватель математики."

Научный руководитель,

к.ф.-м.н., доцент А.Д.Ходалевич

**Рецензия**

на дипломную работу

``Свойства централизаторов конгруэнций универсальных алгебр''

студентки 5 курса математического

факультета Шутовой И.Н.

Теория универсальных алгебр вплоть до 70-х годов развивалась исключительно в рамках теории многообразий. Появление в свет книги Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы ''Формации алгебраических систем'' указало на новые возможности в исследовании универсальных алгебр. Особую значимость в указанной теории играет понятие локальных формаций, в основе которых лежит понятие централизуемости.

В рецензируемой дипломной работе решается проблема адаптирования понятия ''централизуемость идеалов мультиколец'' работы [3] с работой Смита [5] и получен новый результат: идеал  тогда и только тогда централизуется с идеалом , когда соответствующие этим идеалам конгруэнции централизуют друг друга в смысле Смита.

Дипломная работа аккуратно оформлена. Полученные здесь результаты являются новыми и представляют научный интерес.

Считаю, что дипломная работа студентки Шутовой И.Н. удовлетворяет необходимым требованиям, предъявляемым к дипломным работам, и заслуживает оценки ``отлично''.

Рецензент

к.ф.-м.н.,доцент Харламова В.И.